#### Лекция № 9

###### 9. Транспортная задача линейного программирования (ТЗЛП).

На лекции №4 мы уже приводили постановку ТЗЛП:

Пункты отправления:

*А*1, *А*2 ,..., *Аm* ;

Пункты назначения:

*B*1 , *B*2 ,..., *Bn* ;

Запасы однородного груза:

*a*1, *a*2 ,...,*am*

в пунктах отправления;

Заявки: *b*1, *b*2 ,...,*bn*

пунктов назначения.

Предполагается, что

*m n*

 *ai*  *bj*

(9.1)

 *c*11 *c*12 *... c*1*n*

 *c c ... c*

*i*1





*j*1

 21 22 2*n*

 - матрица стоимостей перевозке ( *c* ).

 *...........*  *ij*

 *c c ... c* 

 *m*1 *m* 2 *тn* 

Математическая формулировка.

Пусть

*xij*

, *i*  1, *m*; *j*  1, *n* количество груза, отправляемого из пункта *Ai* в

пункт

*Bj* ;

*xij*  0 .

*Условия* (ограничения):

1. по запасам

 *x*  *a* , 

*n*



1 *j* 1

*j*1



 *x*  *a* ,

*n*

2 *j* 2 

*j*1 

..... 



*n*

(9.2)

1. по заявкам



*j*1

*xmj*

 *a* 

*m* 

 *x*  *b* , 

*m*



*i*1 1

i1



*m*

 *xi* 2  *b*2 ,

(9.3)

*i*1 

..... 



*m*

1. целевая функция



*i*1

*xin*

 *bn* 





*m n*

*E*   *cij xij*  min (9.4)

*i*1 *j*1

Такая задача называется ТЗЛП по критерию стоимости. Так как условия (9.2) и (9.3) и функция (9.4) – линейны, то мы получили типичную ОЗЛП. Её можно решить также симплекс-методом.

Но данная задача имеет особенности, позволяющие решить её более просто (а именно т.н. распределенным методом).

*Особенности*: 1. все *αij*

при

*xij*

равны 1;

1. условия (9.2) и (9.3) связаны одной линейной зависимостью и из (m+n) уравнений только *m+n*-1 – линейно независимы (ранг объединённой системы равен точно *m+n*-1). Так как *r= m+n*-1, то эти уравнения можно разрешить относительно *m+n*-1 базисных переменных, выбрав в качестве свободных остальные

*k*  *nm*  (*m*  *n* 1)  *mn*  *m*  (*n* 1) 

 *m*(*n* 1)  (*n* 1)  (*m* 1)(*n* 1)

переменных. Мы знаем, что в ОЗЛП оптимальное решение достигается в одной из вершин ОДР, где по крайней мере *k* переменных обращаются в нуль.

Значит, для оптимального плана перевозок по крайней мере

(*m* 1)(*n* 1)

значений

*xij*

должны быть равны нулю.

*Терминология*:

а. Значения

*xij*

* перевозки;

б. любая совокупность ( *xij* , план);

*i*  1, *m* ,

*j*  1, *n* ) – план перевозок (или просто

в. если план ( *xij* ) удовлетворяет (9.2) и (9.3), т.е. «балансовым условиям»,

то он называется допустимым;

г. допустимый план ( *xij* ) называется опорным. если в нём отличны от

нуля не более

*r*  *m*  *n* 1

базисных перевозок

*xij* , а остальные

перевозки равны нулю;

д. план ( *xij* ) – оптимальный, если он обеспечивает наименьшую стоимость перевозок.

###### Методы решения ТЗЛП.

Методы не требуют манипуляций с симплекс-таблицами, а связаны с определенными операциями на *транспортной таблице*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ПНПО | B1 | B2 | … | B*n* | Запасы *ai* |
| A1 | c11 | c12 | … | c1*n* | *a*1 |
| A2 | c21 | c22 | … | c2*n* | *a*2 |
| … | … | … | … | … | … |
| A*m* | c*m*1 | c*m*2 | … | c*mn* | *am* |
| Заявки *bj* | *b*1 | *b*2 | … | *bn* | *m n* *ai*  *bj i*1 *j*1 |

ПН – пункты назначения ПО – пункты отправления

Ячейки, где будут записываться отличные от нуля

остальные ячейки – свободные.

*xij*

называются базисными;

Решение ТЗ сводится к нахождению таких значений положительных перевозок, которые будучи проставлены в базисных клетках, давали бы: а) сумма перевозок строк равна запасу данного ПО; б) сумма перевозок столбца равна заявке данного ПН; в) общая стоимость перевозок =>minimum.

###### Нахождение опорного плана перевозок.

И в ТЗЛП решение начинается с нахождения опорного решения (плана). В отличие от общего случая ОЗЛП в ТЗ решение всегда существует. Это вытекает из физических соображений: Е-стоимость перевозок заведомо неотрицательна (ограничена снизу).

Есть много способов решения.

Рассмотрим на примере простейший – *способ северо-западного угла*

(*распределительный метод*).

Пример. Условия ТЗ заданы *транспортной таблицей*. Найти опорное решение (построить опорный план).

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ПНПО | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы *ai* |
| A1 | 1018 | 827 | 53 | 6 | 9 | 48 |
| A2 | 6 | 7 | 830 | 6 | 5 | 30 |
| A3 | 8 | 7 | 109 | 812 | 76 | 27 |
| A4 | 7 | 5 | 4 | 6 | 820 | 20 |
| Заявки *bj* | 18 | 27 | 42 | 12 | 26 | 125 |

Число базисных клеток равно

8  *m*  *n* 1  *r* . Полученное решение является

не только допустимым, но и *опорным решением* (планом), так как число базисных перевозок равно *r* .Является ли этот план оптимальным? Нет, так как при его построении не учитывались *cij* .

Для этого опорного плана

Е=1018+827+53+830+100+812+76+820=1034

Попробуем улучшить этот план, перенеся, например, 18 ед. из ячейки (1,1) в ячейку (2,1) и, чтобы не нарушить баланса, перенеся те же 18 ед. из

ячейки (2,3) в ячейку (1,3). Получим новый план. Для нового плана Е=913 – это уже лучше.

Таким образом, за счёт циклической перестановки 18 ед. груза из одних клеток в другие нам удалось понизить стоимость Е. На этой идее основан алгоритм оптимизации плана.

###### Улучшение плана перевозок. Цикл пересчёта.

В предыдущем разделе мы познакомились со способом улучшения плана при помощи переноса некоторых перевозок по некоторому замкнутому циклу. Рассмотрим эти перестановки подробнее.

Пусть дана следующая ТТ:



**Цикл** – несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией, которая в каждой клетке совершает поворот на 900 (в ТТ показаны два цикла:

- одна с 4-мя вершинами; другая – с 8-ю). Каждый цикл имеет четное число вершин, и, значит, четное число звеньев (стрелок). Стрелки показывают направление обхода цикла.

Знаком «+» отмечаются вершины цикла, в которых перевозки увеличиваются, а знаком «-» - те вершины, где перевозки уменьшаются. Цикл с отмеченными вершинами называется «*означенным*».

Перенести («перебросить») какое-то количество единиц груза по означенному циклу – это значит увеличить перевозки, стоящие в положительных вершинах цикла, на это количество единиц, а перевозки, стоящие в отрицательных вершинах – уменьшить на то же количество. Баланс заявок и запасов при этом не меняется; допустимый план остаётся допустимым. Стоимость же плана может меняться – увеличиваться или уменьшаться.

**Цена цикла** – увеличение стоимости перевозок при перемещение одной единицы груза по означенному циклу. Цена цикла равна *алгебраической сумме* стоимостей, стоящих в вершинах цикла, причем стоимости, стоящие в положительных вершинах, берутся со знаком «+», а в отрицательных – со знаком «-».

Например:

цена цена

*Ц*1  *c*21  *c*23  *c*43  *c*41

*Ц*2  *c*14  *c*16  *c*46  *c*44  *c*34  *c*35  *c*55  *c*54 .

Обозначим цену цикла *Ц* через  . При перемещении одной единицы груза по циклу *Ц* стоимость перевозки увеличивается на  ; при перемещение по нему

*k* ед. груза стоимость перевозок увеличивается на *k* .

*Для улучшения плана имеет смысл перемещать перевозки только по тем циклам цена которых отрицательна.* Каждый раз при перемещении

перевозок по такому циклу значение функции уменьшается на величину *k* .

*Так как перевозки не могут быть отрицательными, мы будем пользоваться только такими циклами, отрицательные вершины которых лежат в базисных клетках ТТ, где стоят положительные перевозки*.

Если циклов с отрицательной ценой в ТТ не осталось, это означает, что дальнейшее улучшение плана невозможно, т.е. оптимальной план достигнут.

Метод последовательного улучшения плана и состоит в том, что в ТТ отыскиваются циклы с отрицательной ценой, по ним перемещаются перевозки, и план улучшается до тех пор, пока циклов с отрицательной ценой в ТТ не останется.

При улучшении плана циклическими переносами пользуются приёмом, заимствованным из симплекс-метода: при каждом шаге (цикле) заменяют одну свободную переменную на базисную, т.е. заполняют одну свободную клетку в ТТ и взамен этого освобождают одну из базисных клеток. При этом

общее число базисных клеток остаётся неизменным: *m*  *n* 1.

Можно доказать, что для любой свободной клетки ТТ всегда существует цикл (и притом единственной), одна из вершин которого лежит в этой свободной клетке, а все остальные – в базисных клетках.

Если цена такого цикла, с плюсом в свободной клетке, отрицательна, то план можно улучшить перемещением перевозок по данному циклу. Количество единиц груза *k* , которое можно переместить, определяется

минимальным значением *xij* , стоящих в отрицательных вершинах цикла.

Пример. Найти оптимальный план ТЗ, заданной следующей таблицей.



**Решение**. Распределительным методом составляем опорный план: Е1=1022+79+625+523+618+720=796.

Число базисных переменных равно *r*  *m*  *n* 1  6 . Улучшаем план,

заняв клетку (2.4) с минимальной стоимостью (4). Цена этого цикла равна

  2 .

Улучшенный план:



Следующий цикл включает клетку (2.1) со стоимостью 5. Его цена

  4 . По этому циклу переместим груза *k*  22.

Е=756-224=668.

Если дальше просматривать циклы с положительной вершиной в свободной клетке, то все цены циклов будут либо положительными, либо нулевыми. Значит, полученный план – оптимальный.

Таким образом, при данном методе оптимизация проводится непосредственным отысканием свободном клеток с отрицательной ценой цикла и в перенесении перевозок по этому циклу.

###### Контрольные вопросы

1. В чем состоят особенности транспортной задачи в отличии от других задач ЛП?
2. Разъясните содержательный смысл терминов: план перевозок, допустимый план, опорный план, оптимальный план.
3. В чем состоит идея распределительного метода (способа северо- западного угла) для нахождения опорного плана перевозок? Приведите пример.
4. Дайте определения понятий: цикл, означенный цикл, цена цикла.
5. В чем состоит идея использования способа циклического переноса грузов в транспортной таблице для улучшения плана перевозок?